

Т е о р е м а 4. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) имеем $l(\alpha) = \infty$ и $h(\alpha) = 0$. Тогда для любого уравнения семейства (1) и любого его решения x_φ такого, что $\varphi(\xi) \in [0, \alpha]$ ($\varphi(\xi) \in [\alpha, 0]$), $\xi \in [-\omega, 0]$, имеем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

В случае линейной функции f значение l не зависит от α . Если $l \neq \infty$, то $h^n(\alpha) = [h(1)]^n \alpha$, поэтому выполнение неравенства $h(1) \geq -1$ ($h(1) > -1$) обеспечивает (экспоненциальную) устойчивость всех уравнений семейства. Если $l = \infty$, то $h = 0$, все уравнения семейства экспоненциально устойчивы, а их функции Коши положительны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малыгина В.В. Метод test-уравнений в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Известия ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. №1 (39). С. 90-91.
2. Чудинов К.М. Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Изв. вузов. Математика. В печати.
3. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I // Изв. вузов. Математика. 2013. № 6. С. 25-36.
4. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 1-13.
5. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. III // Изв. вузов. Математика. 2013. № 8. С. 44-56.
6. Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Изв. вузов. Математика. В печати.
7. An der Heiden U., Mackey M.C. The dynamics of production and destruction: Analytic insight into complex behavior // J. Math. Biol. 1982. V. 16. P. 75-101.
8. Berezansky L., Braverman E., Idels L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. P. 1405-1417.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-96050).

Chudinov K.M. ESTIMATION OF ATTRACTION REGION OF TRIVIAL SOLUTION OF A NONAUTONOMOUS EQUATION WITH AFTEREFFECT

The test-equation method is developed to investigate the asymptotic properties of solutions to nonautonomous equations with aftereffect. Until now, it is applied only for the study of linear classes of equations. This work illustrates using the method for the investigation of the stability of nonlinear equations.

Key words: functional differential equation; stability; test-equation method.

УДК 517.91

ПРИЗНАК И ТИП БИФУРКАЦИИ ХОПФА В НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ КРАТНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

© И.В. Шарафутдинов

Ключевые слова: бифуркация Хопфа; негладкая система; кратное вырождение; признак бифуркации.

Получен признак бифуркации Хопфа для динамической системы с негладкой правой частью, имеющей при некотором значении параметра две пары чисто мнимых собственных значений. Предложен также метод определения типа бифуркации.

Рассматривается динамическая система

$$x' = F(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $F(0, \lambda) \equiv 0$ и гладкость вектор-функции $F(x)$ нарушается на некоторой $N - 1$ -мерной гиперплоскости $\Pi_0 = \{x : (x, b_0) = \alpha_0\}$; где $b_0 \in \mathbb{R}^N$ — некоторый ненулевой вектор и число $\alpha_0 \geq 0$. Пусть правая часть системы (1) представима в виде

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} F_+(x, \lambda), & (x, b_0) > \alpha_0, \\ F_0(x, \lambda), & (x, b_0) = \alpha_0, \\ F_-(x, \lambda), & (x, b_0) < \alpha_0, \end{cases}$$

где F_+ и F_- являются гладкими в соответствующих полукрестностях точки $x = 0$.

Пусть оператор F_+ продолжим на все пространство $\mathbb{R}^N$ с сохранением гладкости. Продолжив его на все пространство, полученную систему можно представить в виде

$$x' = A(\lambda)x + a(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

где $A(\lambda) = F'_{+x}(0, \lambda)$ — матрица Якоби для функции $F_+(x, \lambda)$, вычисленная в начале координат; $a(x, \lambda)$ — нелинейная вектор-функция. Пусть выполнены три условия:

U1) матрица $A_0 = A(\lambda_0)$ имеет две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_1 i$, $\pm\omega_2 i$, где $\omega_2 > \omega_1 > 0$ и отношение $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ не является рациональным числом. вещественные части остальных $N - 4$ собственных значений отрицательны.

U2) Матрица $A(\lambda)$ и функция $a(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируемы по λ , причем $a(x, \lambda) = a_2(x, \lambda) + a_3(x, \lambda) + \varepsilon(x, \lambda)$, где $a_2(x, \lambda)$ и $a_3(x, \lambda)$ — члены порядка 2 и 3 по x , $\varepsilon(x, \lambda) = o(|x|^3)$ содержит слагаемые более высокого порядка малости.

В силу условия U1) у матрицы $A(\lambda)$ при малых $|\lambda - \lambda_0|$ есть простые собственные значения $\mu_1(\lambda) = \alpha_1(\lambda) \pm i\omega_1(\lambda)$ и $\mu_2(\lambda) = \alpha_2(\lambda) \pm i\omega_2(\lambda)$, где функции $\alpha_1(\lambda)$, $\omega_1(\lambda)$, $\alpha_2(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$ непрерывны, причем $\alpha_1(\lambda_0) = 0$, $\omega_1(\lambda_0) = \omega_1$, $\alpha_2(\lambda_0) = 0$, $\omega_2(\lambda_0) = \omega_2$.

U3) Справедливы соотношения $\alpha'_1(\lambda_0) \neq 0$, $\alpha'_2(\lambda_0) \neq 0$.

Система (1) при всех малых $|\lambda - \lambda_0|$ имеет нулевое решение. При переходе параметра λ через λ_0 в окрестности стационарного состояния $x = 0$ могут возникать нестационарные периодические решения малой амплитуды с периодом, близким к $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ или к $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

Число λ_0 называется точкой бифуркации Хопфа для системы (1), если существует такая последовательность $\{\lambda_n\}$, сходящаяся к λ_0 , что при каждом λ_n система (1) имеет нестационарное периодическое решение $x_n(t)$, и $\max_t |x_n(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 1 (признак бифуркации). Пусть выполнены условия U1)–U3). Тогда число λ_0 будет точкой бифуркации Андронова–Хопфа для системы (1), и у системы (1) при малых $|\lambda - \lambda_0|$ существует два семейства периодических решений, периоды которых близки соответственно к $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ или к $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

При этом периодические решения каждого семейства существуют в точности в одном из трех случаев: (1) $\lambda > \lambda_0$ (суперкритическая бифуркация); (2) $\lambda < \lambda_0$ (субкритическая бифуркация); (3) $\lambda = \lambda_0$, причем в первых двух случаях каждому λ отвечает не более одного цикла малой амплитуды каждого периода.

Обозначим через A_0^* матрицу, транспонированную к A_0 . Для каждой пары собственных значений $\pm\omega_k$ ($k = 1, 2$) найдутся две пары таких линейно независимых векторов $e_k, g_k \in \mathbb{R}^N$ и $e_k^*, g_k^* \in \mathbb{R}^N$, что $A_0 e_k = -\omega_k g_k$, $A_0 g_k = \omega_k e_k$, $A_0^* e_k^* = \omega_k g_k^*$, $A_0^* g_k^* = -\omega_k e_k^*$.

Пусть $C = C[0, 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $0 \leq t \leq 1$ вектор-функций с равномерной метрикой. Далее, пусть $F = F[0, 1]$ — банахово пространство функций $x(t) \in C$, $x(0) = x(1)$, ряды Фурье которых абсолютно сходятся. Наконец, пусть $\Phi = \Phi[0, 1]$ — банахово пространство функций $x(t) \in C$, $x(0) = 0$, таких, что $x(t) - tx(1) \in F$.

Определим функции $e_k(t) = e_k \cos 2\pi t - g_k \sin 2\pi t$, $g_k(t) = g_k \cos 2\pi t + e_k \sin 2\pi t$, и функционалы $\alpha_k[x(t)] = (x_c, g_k^*) + (x_s, e_k^*)$, $\beta[x(t)] = (x_c, e_k^*) - (x_s, g_k^*)$, где векторы x_c и x_s — это отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье функции $x(t) \in F[0, 1]$.

Наконец, определим действующий из Φ в F оператор $\Theta x(t) = x(t) - tx(1)$.

Из условия U1) следует, что матрица A_0 обратима. Основными в предлагаемой схеме являются следующие функции:

$$\begin{aligned}\psi_{2k}(t) &= \int_0^t a_2(e_k(s), \lambda_0) ds, \quad \psi_{3k}(t) = \int_0^t a_3(e_k(s), \lambda_0) ds, \\ \Gamma_k(t) &= \frac{1}{T_k} A_0^{-1} \psi_{2k}(1) - \Theta \psi_{2k}(t) - T_k A_0 \int_0^t \exp[T_k A_0(t-s)] \Theta \psi_{2k}(s) ds, \\ \psi_{1k}(t) &= T_k \int_0^t a'_{2x}(e_k(s), \lambda_0) \Gamma_k(s) ds - \psi_{3k}(t), \quad k = 1, 2.\end{aligned}$$

Положим $A' = A'(\lambda_0)$ и определим числа: $\gamma_k = (A' e_k, e_k^*) + (A' g_k, g_k^*)$, $\delta_k = \alpha_k[\Theta \psi_{1k}(t)]$.

Т е о р е м а 2 (о типе бифуркации). Пусть выполнены условия U1)–U3) и $\delta_k \neq 0$, $k = 1, 2$. Тогда рождающиеся при малых $|\lambda - \lambda_0|$ периодические решения $x(t, \lambda)$ системы (1) с периодом, близким к $\frac{2\pi}{\omega_k}$, существуют только при $\lambda < \lambda_0$, если $\delta_k \gamma_k < 0$, или только при $\lambda > \lambda_0$, если $\delta_k \gamma_k > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мардсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 362 с.
2. Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24-30.

Sharafutdinov I.V. TAG AND TYPE OF HOPF BIFURCATIONS IN NON-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEM FOR DEGENERACY

Sign of the Hopf bifurcation for a dynamic system with non-smooth right-hand side, which has a certain value of the parameter two pairs of purely imaginary eigenvalues, is received. Also a method for determining the type of bifurcation is provided.

Key words: Hopf bifurcation; non-smooth dynamical system; fold degeneracy.

УДК 517.91

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, ИМЕЮЩЕГО НАЧАЛЬНЫЙ ПРОГИБ

© Г.Г. Шарафутдинова

Ключевые слова: прогиб стержня; начальный прогиб; устойчивость.

Предлагается новый приближенный метод нахождения критической силы и формы прогиба стержня, сжатого осевой силой и имеющего начальный прогиб.